GALILEO GALILEI *Consideraciones y demostraciones matemáticas sobre dos nuevas ciencias*

SOBRE EL MOVIMIENTO NATURALMENTE ACELERADO

SALVIATI: Hemos tratado en el apartado precedente de las propiedades del movimiento uniforme. Debemos, ahora, tratar del movimiento acelerado.

Ante todo, es necesario investigar y explicar la definición que corresponde con exactitud al movimiento acelerado que nos brinda la naturaleza. En efecto, aunque sea lícito imaginar arbitrariamente ciertas formas de movimiento e investigar las propiedades que de ellas se derivan (así, aquellos que se imaginaron líneas espirales o cóncavas originadas por determinados movimientos, han conseguido demostrar, de hecho, cosa que es digna de admirarse, sus propiedades, argumentando *ex suppositione*, a pesar de que la naturaleza no haga uso de tales movimientos), no obstante, y desde el momento que la naturaleza se sirve de una determinada forma de aceleración, en los cuerpos pesados en caída libre, hemos decidido estudiar sus propiedades, haciendo que la definición que hemos de dar acerca del movimiento acelerado en cuestión corresponda a la esencia del movimiento naturalmente acelerado[(1)]. Esta correspondencia creemos haberla logrado al fin, después de largas reflexiones, especialmente si tenemos en cuenta que las propiedades que hemos ido demostrando sucesivamente [a partir de nuestra definición] parece que corresponden y coinciden exactamente con lo que los experimentos naturales nos ponen delante de nuestros sentidos. En suma, al estudio del movimiento naturalmente acelerado nos ha llevado, como agarrados de la mano, la observación de las costumbres y reglas que sigue la misma naturaleza en todas sus obras restantes, para cuya ejecución suele hacer uso de los medios más inmediatos, más simples y fáciles. No puedo por menos de estar seguro de que no hay nadie que crea que se pueda nadar o volar de una manera más simple y más fácil que la que usan, por instinto natural los peces y los pájaros.

Cuando observo, por tanto, una piedra que cae desde cierta altura, partiendo de una situación de reposo, que va adquiriendo poco a poco, cada vez más velocidad, ¿por qué no he de creer que tales aumentos de velocidad no tengan lugar según la más simple y evidente proporción? Ahora bien, si observamos con cierta atención el problema, no encontraremos ningún aumento o adición más simple que aquel que va aumentando siempre de la misma manera. Esto lo entenderemos fácilmente si consideramos la relación tan estrecha (que se da entre tiempo y movimiento[(2)]: del mismo modo que la igualdad y uniformidad del movimiento se define y se concibe sobre la base de la igualdad de los tiempos y de los espacios (en efecto, llamamos movimiento uniforme al movimiento que en tiempos iguales recorre espacios iguales), así también, mediante una subdivisión uniforme del tiempo podemos imaginarnos que los aumentos de velocidad tengan lugar con [la misma] simplicidad. [Podremos hacer esto] en cuanto determinemos teóricamente que un movimiento es uniformemente y, del mismo modo, continuamente acelerado, cuando, en tiempos iguales, se los tome de la forma que quiera, adquiera incrementos iguales de velocidad. De este modo, si consideramos un número cualquiera de fracciones de tiempo iguales, a partir del primer instante en el que el cuerpo en movimiento abandona la situación de reposo y comienza a descender, el grado de velocidad adquirido en la primera y segunda fracción de tiempo tomadas conjuntamente, es doble del grado de velocidad adquirido por el móvil en la primera fracción; mientras que el grado que se obtiene en tres fracciones de tiempo es el triple y el adquirido en cuatro, cuádruple del grado alcanzado en el primer tiempo, de modo que (para que quede más claro) si el móvil continuara su movimiento según el grado de intensidad [*momento*][(3)] de velocidad adquirido en la primera fracción de tiempo y prosiguiera uniformemente con tal grado, este movimiento sería dos veces más lento que el que obtendría [el móvil] con el grado de velocidad adquirido en dos fracciones de tiempo. Por eso, creo que no nos apartamos en absoluto de la recta razón si admitimos que la intensidad de la velocidad crece según el incremento del tiempo [la velocidad es proporcional al tiempo]. Podemos, en consecuencia, admitir la siguiente definición del movimiento del cual hemos de tratar: llamo movimiento igualmente, o lo que es lo mismo, uniformemente acelerado a aquel que, partiendo del reposo, adquiere en tiempos iguales iguales incrementos de velocidad.

SAGREDO: Aunque no sería razonable que me opusiera a esta o a aquella definición dada por el autor que sea, puedo, sin embargo, sin ofender por ello, dudar que tal definición concebida y establecida en abstracto se adapte, coincida y se verifique en esa especie de movimiento acelerado que se da en los cuerpos graves que caen naturalmente. Y puesto que parece que el autor nos promete que tal como él lo ha definido, es el movimiento natural de los cuerpos graves, me gustaría quitar de en medio ciertas dificultades que oscurecen mi mente con el fin de entregarme, después, con mayor atención a las proposiciones y demostraciones correspondientes.

SALV.: Me parece oportuno que V. S. y el señor Simplicio vayan adelantando las objeciones; son las mismas, me imagino, que se me iban ocurriendo a mí cuando vi por primera vez este tratado, siendo resueltas o bien por el mismo autor, en discusiones con él, o bien por mí mismo, dando vueltas a los problemas

SAGR.: Cuando me imagino un grave que cae desde el reposo, o sea, de la privación de toda velocidad, y comienza a moverse acelerándose [*velocitando*] según la proporción en que aumenta el tiempo desde el primer instante del movimiento; así, por ejemplo, en ocho pulsaciones adquiriría ocho grados de velocidad de la cual había ganado cuatro en la cuarta pulsación; en la segunda, dos; en la primera, uno...; al ser el tiempo subdivisible al infinito, se sigue que, en cuanto que la velocidad antecedente va disminuyendo siempre por tal razón, no habrá grado de velocidad tan pequeño o, dicho de otra manera, grado de lentitud [*tardità*] tan grande en el que no se encuentre el mismo móvil después de que parta de la lentitud infinita, esto es, del reposo. De este modo, si aquel grado de velocidad que tenía después de cuatro pulsaciones era tal que, manteniéndolo uniforme, hubiera recorrido dos millas en una hora, mientras que con el grado de velocidad alcanzado en la segunda pulsación habría hecho una milla en una hora, podemos concluir, entonces, que en los instantes de tiempo que se acercan cada vez más a aquel primero por el cual pasa del reposo al movimiento, estaría en una situación de lentitud tal que no conseguiría atravesar (si continuase moviéndose con una lentitud tan acusada) una milla en una hora, ni en un día, ni en un año, ni en mil; más aún, no avanzaría ni siquiera un palmo por mucho tiempo que dejemos discurrir. Parece que la imaginación se acomoda a este fenómeno con dificultad, mientras que los sentidos nos muestran que un grave, cuando cae, pasa inmediatamente a tener una velocidad notable.

SALV.: Es ésta una de aquellas dificultades que, al principio, me dieron mucho que pensar; no obstante, en poco tiempo conseguí deshacerme de ella. Fue, precisamente la misma experiencia, que es la que os suscita la dificultad, la que se encargó de resolvérmela. Decís que os parece que la experiencia muestra que apenas un grave ha salido de su posición de reposo adquiere una velocidad muy apreciable. Pues bien, yo os aseguro que es esta misma experiencia la que os hace patente que los primeros movimientos [*impeti*][(4)] del cuerpo que cae, por muy pesado que sea, son enormemente lentos. Colocad un grave sobre una materia blanda y dejadlo allí sin que ejerza ninguna otra presión que no sea la de su propio peso. Es evidente que si lo elevamos uno o dos codos para dejarlo caer, después, encima de la misma, ejercerá una nueva presión debida al golpe, mayor que la producida al principio por medio del peso solo. El efecto tendrá como causa tanto el móvil en su caída como la velocidad adquirida en dicha caída. Este efecto será cada vez mayor a medida que el golpe tenga lugar desde una altura mayor, esto es, a medida que la velocidad con la que se efectúa el golpe sea mayor. De este modo, podemos deducir sin error la mayor velocidad de un grave que cae a partir de la cantidad y calidad del golpe. Pero, además, señores, ¿no es cierto que la maza que se deja caer sobre una estaca desde una altura de cuatro codos fijándola en tierra cuatro dedos, por ejemplo, si cae de una altura de dos codos la introducirá bastante menos, menos aún si cae desde la altura de un codo y mucho menos desde la altura de un palmo. Y, finalmente, si la elevamos a la altura de un dedo, ¿qué diferencia habrá con dejarla simplemente encima, sin que se dé golpe alguno? Poquísima, sin duda alguna; y una operación absolutamente imperceptible sería si se elevara a una altura equivalente al grosor de una hoja. Y dado que el resultado del golpe depende de la velocidad del cuerpo que golpea, ¿quién podrá dudar que el movimiento será lentísimo y casi mínima la velocidad allí donde su actuación es imperceptible? Veis pues, cuánta es la fuerza de la verdad, ya que la misma experiencia, que en un principio parecía mostrarnos una cosa, una vez que la observamos más de cerca, nos asegura de lo contrario.

Pero sin que tengamos que conformarnos sólo con tal experiencia (que, sin duda alguna, es del todo concluyente), me parece que no es difícil captar con la sola razón]a verdad expuesta. Imaginémonos una pesada piedra, que está en reposo en el aire, si se quita el soporte y se deja en libertad, al ser más pesada que el aire, comienza a descender, pero no con movimiento uniforme, sino que, siendo su movimiento lento al principio, se va, después, acelerando continuamente. Ahora bien, dado que la velocidad puede aumentar y disminuir sin límite, ¿qué es lo que me impediría creer que tal móvil, que parte de una lentitud infinita (pues tal es el reposo) alcance inmediatamente diez grados de velocidad, en vez de una velocidad de cuatro, de dos, de uno, de medio o de un centésimo? Escuchad, por favor. No pienso que no estuvieseis dispuestos a concederme que la adquisición de los grados de velocidad de la piedra que cae desde su estado de reposo pueda llevarse a cabo según el mismo orden que la disminución y pérdida de los mismos grados, si la piedra, impelida por alguna fuerza [*virtù*], fuese devuelta a la misma altura; si esto es posible, no veo por qué se pueda poner en duda que al disminuir la velocidad de la piedra ascendente, al ir consumiendo su velocidad, haya de pasar por todos los grados de lentitud, antes de llegar al estado de reposo.

SIMPLICIO: Pero si los grados de lentitud cada vez mayores son infinitos, entonces jamás llegarán a consumirse todos. De ahí que el grado ascendente en cuestión no llegara jamás al reposo, sino que se moverá infinitamente cada vez más despacio, cosa que no parece suceder.

SALV.: Ocurriría esto, señor Simplicio, si el móvil permaneciera durante cierto tiempo en cada grado de velocidad; lo que ocurre simplemente es que pasa sin emplear más de un instante. Y puesto que en cualquier intervalo de tiempo, por muy pequeño que sea, hay infinitos instantes, éstos serán siempre suficientes para corresponder a los infinitos grados con los que puede ir disminuyendo la velocidad.

Que un grave ascendente como el que estamos considerando no permanezca durante intervalo de tiempo alguno en un mismo grado de velocidad es algo que se puede poner de manifiesto de la siguiente manera: si, una vez asignado un intervalo de tiempo determinado, el móvil tuviese el mismo grado de velocidad, tanto en el primer instante de dicho tiempo como también en el último, desde este segundo grado podría elevarse igualmente hacia arriba un espacio semejante, de la misma manera que pasó del primer al segundo espacio; por la misma razón pasaría del segundo al tercero para continuar, finalmente, su movimiento uniforme sin limitación alguna.

SAGR.: Me parece que de los razonamientos que acabáis de aducir se podría obtener una solución apropiada a la discutida cuestión filosófica en la que se plantea cuál sea la causa de la aceleración del movimiento natural de los graves. Puesto que, según creo, en el caso del grave que es impelido hacia arriba, la fuerza [*virtù*] imprimida por el cuerpo que lo proyecta va disminuyendo continuamente. Esta fuerza, mientras sea superior a la que actúa en sentido contrario, o sea, a la gravedad, lo impulsa hacia lo alto. Ahora bien, una vez que hayan alcanzado una y otra un estado de equilibrio, el móvil deja de ascender pasando al estado de reposo, en el cual el impulso [*impeto*] que se le habría imprimido no queda aniquilado sin más ni más, sino que comienza a desaparecer lo que antes prevalecía sobre la gravedad del móvil y que era la causa de que lo hiciera subir. Al ir disminuyendo este impulso [*impeto*] sobreañadido y comenzar, consecuentemente, a tomar ventaja el peso [*gravità*], empieza la caída con lentitud a causa de la fuerza [*virtù*] que traía impresa el móvil y buena parte de la cual permanece todavía en éste. Ahora bien, en cuanto que dicha fuerza va disminuyendo continuamente, siendo superada cada vez más por la gravedad, el resultado es la continua aceleración del movimiento.

SIMP.: La idea es aguda, pero tiene más de sutil que de cierta, ya que, incluso en el caso de que fuese concluyente, no serviría sino para explicar aquellos movimientos naturales a los que les precede un movimiento violento, en los que queda aún activa parte de la fuerza [*virtù*] externamente aplicada. Allí, sin embargo, en donde no se da tal resto, sino que el móvil parte de un estado de reposo prolongado, el razonamiento pierde toda su fuerza.

SAGR.: Me parece que os equivocáis y que esta distinción que hacéis entre los dos casos es superflua o, para decirlo con mayor rigor, no existe. Pero decidme, ¿puede un proyectil recibir, del cuerpo que lo lanza, mucha o poca fuerza [*virtù*] de modo que se le pueda hacer subir cien codos, veinte, cuatro o uno?

SIMP.: Sin duda alguna.

SAGR.: No es menos cierto, por tanto, que tal fuerza imprimida por el móvil podrá superar la resistencia del peso [*gravità*] tan exiguamente que sólo lo eleve a la altura de un dedo. Finalmente, la fuerza del proyector puede ser tal que se equilibre con la resistencia del peso de forma que el móvil no salga lanzado, sino que quede simplemente sostenido. Así, si cogéis en vuestra mano una piedra, ¿qué hacéis si no es imprimirle una fuerza que la impele hacia arriba y que es equivalente al poder [*facoltà*] de su peso que la atrae hacia abajo? ¿No continuáis conservando esa fuerza impresa todo el tiempo que la sostenéis en vuestra mano? ¿Disminuye, acaso, dicha fuerza por mucho que la mantengáis en vuestra mano? Y este soportar que impide la caída de la piedra, ¿qué importa que se haga con vuestra mano, con una tabla o con una cuerda de la que cuelgue la piedra? Nada en absoluto. Llegad, por tanto, señor Simplicio, a la conclusión de que el hecho de que preceda a la caída de la piedra un reposo grande o breve o instantáneo, no trae consigo una diferencia, con tal de que la piedra no parta nunca sometida a una fuerza contraria a su gravedad y que sea suficiente para mantenerla en reposo.

SALV.: No me parece éste el momento más oportuno para investigar la causa de la aceleración del movimiento natural y en torno a la cual algunos filósofos han proferido distintas opiniones. Algunos la han explicado por la proximidad al centro; otros, por la disminución de la parte del medio que queda por atravesar; otros, finalmente, por cierta impulsión del medio ambiente, el cual al volver a cerrarse por detrás del móvil, lo va presionando y proyectando continuamente. Tales fantasías, aparte de otras muchas, habría que irlas examinando y resolviendo con bien poco provecho.[5]

Por el momento es la intención de nuestro autor investigar y demostrar algunas propiedades del movimiento acelerado (sea cual sea la causa de tal aceleración), de tal modo que la intensidad [*momenti*] de su velocidad vaya aumentando, después de haber partido del reposo según aquella simplicísima proporción con la que aumenta la continuación del tiempo, que es lo mismo que decir que en tiempos iguales el móvil recibe iguales incrementos de velocidad.

Y si nos encontramos con que las propiedades que serán demostradas más adelante se dan en el movimiento de los graves que caen naturalmente acelerados, podremos concluir que la definición que hemos supuesto incluye tal movimiento de los graves y que es cierto que la velocidad [*accelerazione*] de dichos graves va aumentando en proporción al incremento del tiempo y de la duración del movimiento.

SAGR.: Por lo que veo de momento, me parece que tal vez se podría haber definido el movimiento uniformemente acelerado con mayor claridad y sin variar el concepto, de la siguiente manera: movimiento uniformemente acelerado es aquel en el cual la velocidad va aumentando en la misma proporción en la que aumenta el espacio que atraviesa; de modo que, por ejemplo, el grado de velocidad adquirido por el móvil en una caída de cuatro codos sería el doble que habría adquirido si hubiese caído desde la altura de dos codos y éste, a su vez, el doble del que habría conseguido durante el espacio del primer codo. Y es que me parece fuera de toda duda que el grave que desciende desde la altura de seis codos posee y golpea con un impulso [*impeto*] que es doble del que tendría si hubiese caído desde la altura de tres codos, triple del que tendría si viniese de dos y sextuplo si se tratara de un espacio de un solo codo.

SALV.: Es para mí un consuelo considerable tener un compañero tal en el error. Más aún, vuestro razonamiento parece tan verosímil y probable que nuestro autor mismo no me negó, cuando se lo propuse, que él también había incurrido durante cierto tiempo, en la misma falacia. Lo que más tarde me maravilló de modo especial fue el darme cuenta de que dos proposiciones que parecen tan verosímiles (hasta el punto que, habiéndoselas propuesto a mucha gente, no he encontrado a nadie que no las admitiera sin reticencia) se muestran, con unas pocas palabras, no sólo como falsas sino como imposibles.

SIMP.: A decir verdad, yo me encontraría en el número de aquellos que lo concederían, ya que creo que un grave que cae *vives acquirat eundo* [adquiere fuerza mientras desciende], aumentando su velocidad en proporción al espacio, así como que la intensidad (momento) del choque del mismo cuerpo al caer, es el doble si viene desde una altura que sea el doble. Estas proposiciones me parece que hay que admitirlas sin ninguna duda o controversia.

SALV.: Son, sin embargo, tan falsas e imposibles como lo es que el movimiento se realice instantáneamente. Veamos una clara demostración de esto. Si las velocidades son proporcionales a los espacios atravesados o por atravesar, tales espacios son recorridos en tiempos iguales; en consecuencia, si la velocidad con la que el cuerpo que cae recorre cuatro codos fue el doble de la velocidad con la que recorrió los dos primeros codos (precisamente en cuanto que una distancia es el doble de la otra), entonces los intervalos de tiempo de tales recorridos son iguales. Ahora bien, que un mismo móvil atraviese los cuatro y los dos codos en el mismo tiempo es algo que no puede darse, a no ser que en el movimiento instantáneo. Nosotros vemos, no obstante, que el grave que cae realiza su movimiento en el tiempo, recorriendo en menos los dos codos que los cuatro. Es, por tanto, falso que su velocidad aumente en proporción al espacio.

Se puede demostrar con la misma claridad la falsedad de la otra proposición. Puesto que el cuerpo que golpea es el mismo, la única manera de determinar la diferencia e intensidad [*momento*] de los golpes proviene de las diferencias de velocidad. Así, si el cuerpo que cae de una altura doble golpease con doble intensidad [*momento*] sería necesario que golpease con el doble de velocidad. Ahora bien, el doble de velocidad recorre el doble de espacio en el mismo tiempo, mientras que nosotros observamos que el tiempo de la caída desde la altura mayor dura más.

SAGR.: Presentáis conclusiones recónditas con gran evidencia y facilidad. Esta excesiva facilidad las hace de menor estima de lo que lo serían si se presentaran de una manera más complicada. Pienso que el pueblo estimaría menos un saber alcanzado con tan poco trabajo que el alcanzado con largas y abstrusas discusiones.

SALV.: Si a aquellos que demuestran con gran brevedad y claridad las falacias de las proposiciones que se han tenido por verdaderas por todo el mundo se les tratara solamente con agradecimiento, en vez de con desprecio, sería esto, todavía, un daño bastante soportable. Más desagradable y molesto es contemplar a algunos que, pretendiendo estar a la altura de quien sea en un determinado campo de estudio, tienen como verdadero cosas cuya falsedad otros, con un razonamiento breve y fácil, ponen al descubierto. No llamaría envidia yo a este sentimiento que tienen ciertas personas, la cual suele convertirse en odio e ira contra los descubridores de tales falacias. Pienso que se trata, más bien de un ardiente deseo de mantener viejos errores en vez de recibir las verdades que se acaban de descubrir. Este deseo les induce, a veces, a escribir en contra de la verdad, aunque internamente la reconozcan como tal sólo con el fin de que el pueblo poco instruido no estime la obra de otras personas. Acerca de tales falacias, reputadas como verdaderas, pero fáciles de refutar, he escuchado no poco de boca de nuestro académico, y alguna de ellas incluso he tomado nota.

SAGR.: V. I. no deberá privarnos de ellas, comunicándonoslas a su debido tiempo, haciendo incluso una sesión extraordinaria si fuese necesario. Por el momento, recogiendo el hilo de nuestra conversación, me parece que, hasta el presente, lo que hemos hecho es establecer la definición del movimiento uniformemente acelerado, del que trataremos en lo que a continuación sigue. Tal definición es:

Llamamos movimiento igualmente, esto es, uniformemente acelerado, a aquel que partiendo del reposo, adquiere, en tiempos iguales incrementos de rapidez [*celeritatis momenta*].

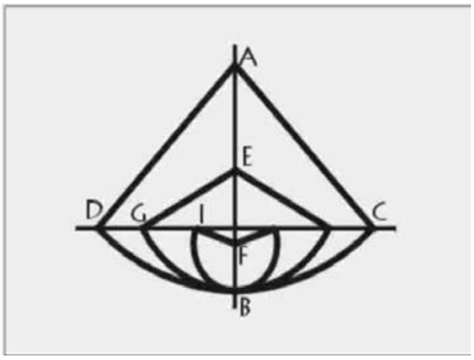
SALV.: Una vez establecida tal definición, el autor supone y postula como verdadero un solo principio, que es el siguiente:

Doy por supuesto que los grados de velocidad alcanzados por un mismo móvil, en planos diversamente inclinados, son iguales cuando las alturas de los mismos planos son también iguales.

Llamemos altura de un plano inclinado a la perpendicular que cae desde la parte superior de dicho plano sobre la línea horizontal, trazada por la parte inferior del mismo plano inclinado. A modo de ilustración [fig. 1], sea la línea AB la horizontal, sobre la cual caen los dos planos inclinados CA y CD. A la perpendicular CB, que cae sobre la horizontal BA el autor la denomina altura de los planos CA y CD. Supone él que los grados de velocidad de uno y el mismo móvil, que descienda por los planos inclinados CA y CD, serán iguales si los comparamos en los puntos finales A y D, al ser la altura de ambos planos la misma; esto es, CB. Lo mismo ha de entenderse con respecto al grado de velocidad que alcanzaría el mismo móvil en el punto B si cayese desde C.

SAGR.: La verdad es que esta suposición me parece tan plausible que es digna de que se la acepte sin ninguna objeción[(6)], siempre y cuando supongamos también que queden fuera de consideración las resistencias externas posibles y que los planos sean lo suficientemente sólidos y tersos, así como que el móvil posea una figura absolutamente redonda, de modo que ni el móvil ni el plano tengan la menor aspereza. Si dejamos de lado todas estas resistencias y dificultades, mi razón me dice, con toda naturalidad, que una bola pesada y absolutamente redonda, que descendiera por las líneas CA, CD y CB alcanzaría los puntos terminales A, D y C con impulsos [*impeti*] iguales.

SALV.: Vuestro razonamiento es sumamente plausible, pero me gustaría aumentar por medio de la experiencia las probabilidades de esto que nos parece verosímil a fin de que le falte muy poco para que sea equivalente a una exacta demostración. Imaginaos que esta página sea una pared erigida verticalmente, con un clavo incrustado en ella [fig. 2]. Desde dicho clavo se deja colgar una bola de plomo de dos o tres onzas mediante el finísimo hilo AB, cuya longitud es de dos o tres codos, quedando perpendicular a una línea horizontal, DC que corte a escuadra la vertical AB. Este hilo está separado de la pared por una distancia aproximada de dos dedos. Si llevamos, después, el hilo AB, con la bola, hasta AC y lo dejamos caer libremente, veremos, en primer lugar, que desciende describiendo el arco CB de modo que, sobrepasando el punto B, recorrerá el arco BD, llegando casi a tocar la recta que habíamos trazado, CD. Si no llega a tocarla es por muy poco, siendo la causa de ello la resistencia que oponen el aire y el hilo. De todo esto podemos concluir perfectamente que el impulso que había adquirido la bola en el punto B, al recorrer el arco CB, fue suficiente como para elevarla por el arco BD hasta alcanzar la misma altura. Una vez repetido este experimento varias veces, fijemos un clavo en la pared muy cerca de la perpendicular AB, como podrían ser E o F, que sobresalga de la pared unos cinco o seis dedos. La finalidad de ello es que el hilo AC, al volver a llevar, como antes, a la bola C a través del arco CB, una vez que haya llegado a B chocará el hilo con el clavo E, viéndose obligado a describir el arco BG alrededor del centro E. Con esto podemos ver lo que puede hacer el mismo impulso [*impetu*], el cual, antes, desde el mismo punto B, hizo subir el mismo móvil a través del arco BD hasta la altura de la línea horizontal CD. Ahora, señores, podéis contemplar con placer que la bola se balancea hasta el punto G, y lo mismo sucedería si el choque se produjera en el punto F, en cuyo caso la bola describiría el arco BI, acabando siempre, sin embargo, su balanceo en la línea CD. Si el choque con el clavo tuviera lugar tan abajo que la parte del hilo que queda debajo del clavo no fuese lo suficientemente largo como para alcanzar la altura CD (lo cual ocurriría en el caso de que el clavo estuviera más cerca del punto B que de la intersección de AB con CD), entonces el hilo saltaría sobre el clavo enrollándose en éste.



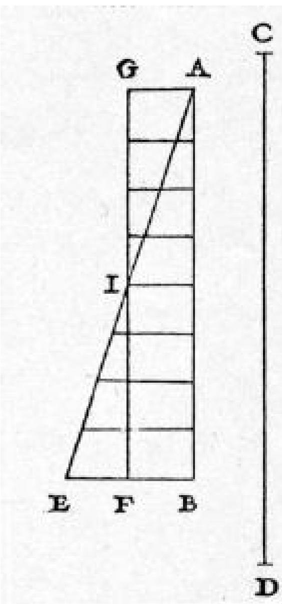
Este experimento no deja lugar a dudas, sobre la verdad del supuesto, ya que siendo los dos arcos, CB y DB, iguales y colocados de la misma manera, la intensidad [*momento*] de velocidad adquirida tras el descenso por el arco CB, es la misma que la adquirida a través del arco DB. Ahora bien, la intensidad de velocidad [*momento*] alcanzada en B después de recorrer el arco CB, es capaz de empujar hacia arriba al móvil en cuestión a través del arco BD. La intensidad [*momento*] de velocidad, por tanto, adquirida en la bajada por DB es igual a la que impulsa al móvil por el mismo arco hacia D, a través de B. De modo que, en general, la intensidad [*momento*] de velocidad adquirida en el descenso por un arco es igual a la que puede hacer subir al mismo móvil por el mismo arco. Pero todas esas intensidades [*momenti*] de velocidad, que son las causantes de la subida por medio de los arcos BD, BG y BI, son iguales, puesto que son el producto de la misma intensidad [*momento*] de velocidad, que se adquiere en la caída CB, como muestra el experimento. Así, pues, todas las intensidades [*momenti*] que se alcanzan en la bajada por los arcos DB, GB e IB son iguales.

SAGR.: El razonamiento me parece concluyente del todo, y el experimento es tan apto para establecer el postulado, que podemos considerar como si se lo hubiera demostrado.

SALV.: No quisiera señor Sagredo, que nos ocupáramos más de lo debido de esta materia si pensamos, sobre todo, que hemos de aplicar lo que hemos dicho, especialmente a los movimientos que tienen lugar en las superficies planas. Aunque el experimento que hemos hecho nos muestra que la caída por el arco CB confiere al móvil una intensidad [*momento*] tal que pueda volver a llevarlo a la misma altura por cualquiera de los arcos BD, BG o BI, nosotros no podemos mostrar, con la misma evidencia, que lo mismo habría de ocurrir en el caso de que una bola totalmente redonda hubiese de descender a través de planos rectos, cuyas inclinaciones son, respectivamente, las mismas que las cuerdas de dichos arcos. Es de suponer, más bien, que al formarse en el punto B ángulos producidos por estos planos, la bola que cae por la inclinación que corresponde a la cuerda CB, al encontrar obstáculo en los planos que descienden según las cuerdas BD, BG y BI, en su choque con éstos perdería impulso [*impeto*], no pudiendo, en su ascenso, alcanzar la altura de la línea CD. Si quitamos, sin embargo, el obstáculo que interfiere con el experimento, es algo fácil de captar que el impulso [*impeto*] (el cual efectivamente, adquiere fuerza en proporción a la cantidad de la caída) tendría fuerza suficiente como para hacer subir de nuevo al móvil hasta la misma altura. Tomemos, de momento, pues, esto como un postulado, cuya verdad sin sombras estableceremos más adelante al contemplar otras conclusiones, fundamentadas en tales hipótesis y que responden con toda exactitud a los experimentos. Una vez supuesto por el autor este único principio, pasa a las proposiciones, que demuestra con toda evidencia. La primera de las cuales es ésta:

TEOREMA I, PROPOSICIÓN I

El tiempo en el cual un espacio dado es recorrido por un móvil que parte del reposo con movimiento uniformemente acelerado, es igual al tiempo en el que aquel mismo espacio habría sido recorrido por el mismo móvil con un movimiento uniforme cuyo grado de velocidad fuese la mitad del grado de velocidad máximo alcanzado al final del movimiento uniformemente acelerado precedente.



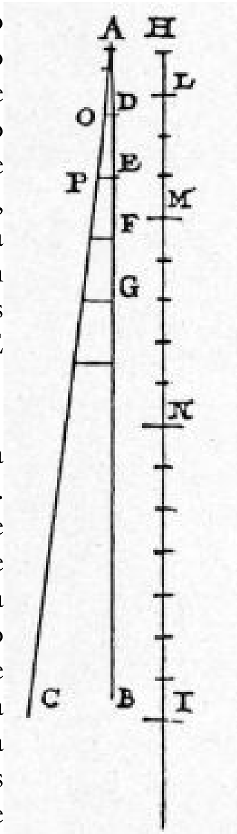
Representémonos [fig. 3] por medio de la línea AB el tiempo durante el cual atraviesa el espacio CD un móvil, cuyo movimiento desde el punto de reposo C es uniformemente acelerado. Representemos el valor máximo y final de la velocidad obtenida durante el intervalo AB con la línea EB, trazada en ángulo recto con respecto a la línea AB. Si trazamos, ahora, la línea AE, entonces todas las líneas que partan de los puntos equidistantes en AB y paralelas a BE, representarán el aumento del grado de velocidad, desde su inicio en el instante A. El punto F partirá después en dos la línea EB. Tracemos FG, paralela a BA, y GA paralela a FB; quedará así formado un paralelogramo, AGFB, que será igual [en área] al triángulo AEB, ya que el lado GF secciona por la mitad el lado AE por el punto I. Si las líneas paralelas del triángulo AEB se extendieran hasta GI, entonces la suma de todas las paralelas está contenida en el triángulo AEB ya que las del triángulo IEF se corresponden con las que están contenidas en el triángulo GIA, mientras que las que están dentro del trapecio AIFB son comunes. Puesto que todos y cada uno de los instantes de tiempo del intervalo AB tienen su punto correspondiente en la línea AB, en donde las líneas paralelas trazadas y limitadas por el triángulo AEB representan el aumento de los grados de velocidad; y puesto que las paralelas que se encuentran dentro del rectángulo representan los grados de velocidad que no aumenta, sino que se mantiene constante, se evidencia, entonces, de la misma manera, que las intensidades de velocidad [*momenta*] que toma el cuerpo en movimiento se pueden representar, en el caso del movimiento acelerado, por el aumento de las paralelas del triángulo AEB mientras que, en el caso del movimiento uniforme, por medio de las paralelas del rectángulo GB. Ocurre que la intensidad [*momentum*] que puede faltar en la primera parte del movimiento acelerado (estando representada la deficiencia de las intensidades de velocidad por las paralelas del triángulo AGI) se completa con las intensidades que manifiestan las paralelas del triángulo IEF.

Se pone de manifiesto de todo lo dicho que espacios iguales serán atravesados en tiempos iguales por dos cuerpos, uno de los cuales partiendo del reposo, se mueve con una aceleración uniforme, mientras que la intensidad de velocidad del otro, que se mueve con velocidad uniforme, es un medio de la intensidad máxima que alcanzaría con movimiento acelerado.

TEOREMA II, Proposición II

Si un móvil cae, partiendo del reposo, con un movimiento uniformemente acelerado, los espacios por él recorridos en cualquier tiempo que sea están entre sí como el cuadrado de la proporción entre los tiempos, o lo que es lo mismo, como los cuadrados de los tiempos.

Representemos el tiempo [fig.4] que comienza en el instante A por medio de la línea recta AB, en la que tomamos dos intervalos de tiempo cualquiera, llamándolos AD y AE. HI representará la distancia a través de la cual cae el cuerpo, partiendo del estado de reposo, con un movimiento uniformemente acelerado. Si HL representa el espacio atravesado durante el intervalo de tiempo AD y HM el cubierto durante el intervalo AE, entonces el espacio MH está con respecto al espacio LH en una proporción que es al cuadrado de la proporción del tiempo AE con respecto al tiempo AD; podemos decir también, simplemente, que las distancias HM y HL tienen la misma proporción que los cuadrados de AE y AD.



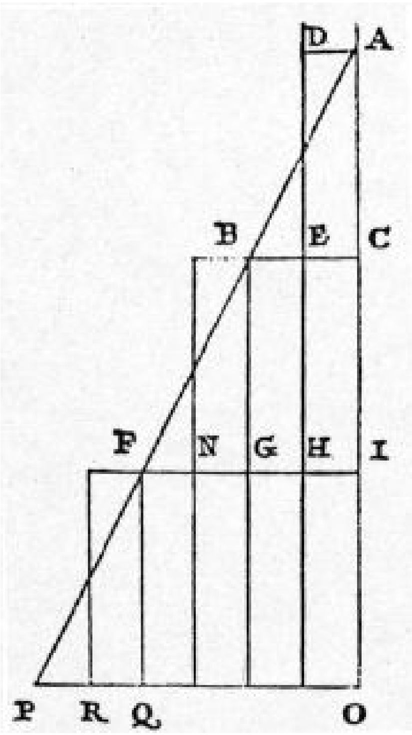
Tracemos la línea AC de modo que forme un ángulo cualquiera[7] con la línea AB; desde los puntos D y E tracemos las líneas paralelas DO y EP. De estas dos líneas, DO representa la velocidad máxima alcanzada durante el intervalo de tiempo AD, mientras que EP representa el máximo de velocidad obtenido durante el intervalo AE. Ahora bien, se ha probado ya que, en lo que atañe a atravesar distancias, es lo mismo que un cuerpo caiga desde su posición de reposo con un movimiento uniformemente acelerado o que caiga durante un intervalo de tiempo igual con una velocidad constante, que sea la mitad de la velocidad máxima alcanzada durante el movimiento acelerado. Se sigue de aquí, pues, que las distancias HM y HL son las mismas que las que serían recorridas, en los intervalos de tiempo AE y DA por velocidades uniformemente aceleradas iguales a un medio de las representadas por DO y EP respectivamente. Si, por tanto, se puede mostrar que las distancias HM y HL están en la misma proporción que los cuadrados de los tiempos AE y DA, nuestra proposición habrá sido probada.

En la cuarta proposición del primer libro se demostró que los espacios recorridos por dos cuerpos con movimiento uniforme guardan entre sí una proporción que es igual al producto de la proporción de las velocidades por la proporción de los tiempos. Pero, en este caso, la proporción de las velocidades es la misma que la proporción de los tiempos (puesto que la proporción de AE a AD es la misma que la de la mitad de EP a la mitad de DO o la de EP a DO). En consecuencia la proporción de los espacios recorridos es la misma que la proporción de los tiempos al cuadrado, que es lo que se trataba de demostrar.

Es patente, por tanto, que la proporción de las distancias es el cuadrado de la proporción de las velocidades finales, es decir, de las líneas EP y DO, ya que éstas están entre sí como AE y AD.

COROLARIO I

Se sigue claramente de aquí que, si desde el primer instante o inicio del movimiento hubiéramos tomado sucesivamente un número cualquiera de tiempos iguales, como, por ejemplo, AD, DE, EF, FG, en los cuales se recorran los espacios HL, LM, MN, NI, estos espacios estarán entre sí como los números impares *ab unitate*; es decir, como 1, 3, 5, 7: es ésta, efectivamente, la proporción entre los excesos de los cuadrados de las líneas que se sobrepasan igualmente y cuyo sobrante es igual a la más pequeña de ellas[8]; es decir, entre los números cuadrados consecutivos *ab unitate*. Por lo tanto, cuando los grados de velocidad aumentan, en tiempos iguales, según la serie de los números naturales, los espacios recorridos, en los mismos tiempos, adquieren incrementos según la serie de los números impares *ab unitate*.



SAGR.: Suspended, por favor, la lectura un momento, pues le estoy dando vueltas a una idea que se me acaba de ocurrir. Para explicarla, y en bien de la claridad mía y vuestra, la ilustraré con un dibujo [fig. 5]. Por medio de la línea AI quiero representar el transcurso del tiempo, partiendo del primer instante en A. Aplicando después en A, según un ángulo cualquiera, la recta AF y uniendo los puntos terminales I y F, mientras que se divide el tiempo AI en su mitad, C, trazo la paralela a IF, CB. Si consideramos, después, la línea CB como el grado máximo de la velocidad que, a partir del reposo en el primer instante de tiempo A, fue en aumento según el incremento que se manifiesta en las paralelas a BC, trazadas en el triángulo ABC (que es lo mismo que decir que la velocidad aumenta en proporción al tiempo), entonces admito sin ninguna dificultad, en vista de los argumentos dados hasta el momento, que el espacio recorrido por el móvil que cae con el incremento de velocidad descrito será igual al espacio que recorrería el mismo móvil durante el mismo intervalo de tiempo AC con movimiento uniforme, cuyo grado de velocidad fuese igual a EC, que es la mitad de BC.

Imaginemos ahora que el móvil que cae con movimiento acelerado y que se encuentra en el instante C tiene el grado de velocidad BC. Es evidente que si tal móvil continuase moviéndose con el mismo grado de velocidad BC, sin más aceleración, atravesaría, en el tiempo siguiente CI, un espacio que es el doble del que pasó en el mismo tiempo AC con el grado de velocidad uniforme EC, que es, a su vez, la mitad del grado BC. Pero, puesto que el móvil desciende con una velocidad que va aumentando uniformemente siempre en todos los tiempos iguales, en el tiempo subsiguiente añadirá al grado de velocidad CB las correspondientes intensidades [*momenti*] de velocidad creciente según las paralelas del triángulo BFG, que es igual al triángulo ABC; de modo que, añadiendo al grado de velocidad GI la mitad del grado FG, el mayor de los adquiridos en el movimiento acelerado y de los determinados por las paralelas del triángulo BFG, obtendremos el grado de velocidad IN, con el que se habría desplazado en el tiempo CI si el móvil hubiera hecho el recorrido con movimiento uniforme. Este grado IN, al ser el triple del EC, nos hace pensar que el espacio recorrido en el segundo tiempo CI debe ser triple del recorrido en el primer tiempo CA. Y si nos imaginamos que a AI se le suma otra parte semejante de tiempo IO, de forma que el triángulo aumente hasta APO, es evidente que si el movimiento continuara durante el intervalo de tiempo IO con el grado. de velocidad IF que ha sido obtenido durante el tiempo AI con un movimiento acelerado, al ser tal grado IF el cuádruple de EC, el espacio recorrido en el tiempo IO sería el cuádruple del recorrido durante el primer intervalo de tiempo AC. Pero, si continuamos aumentando la aceleración uniforme en el triángulo FPQ, que es semejante a ABC, el cual, tomado como movimiento uniforme, añadiría un grado de velocidad igual a EC, una vez añadido el grado QR, que es igual a EC obtendremos toda la velocidad uniforme que ha tenido lugar en el tiempo IO y que es el quíntuplo de la velocidad uniforme desarrollada durante el primer intervalo de tiempo AC. En consecuencia, con este sencillo cálculo se ve también que los espacios recorridos en tiempos iguales por un móvil (que, partiendo del reposo, va adquiriendo velocidad en proporción al aumento del tiempo, están entre sí como los números impares *ab unitate* 1, 3, 5; y si tomamos en total los espacios atravesados, el recorrido en el doble de tiempo es el cuádruple del recorrido en la mitad; el recorrido en el tiempo triple es nueve veces y, en suma, los espacios atravesados están en una proporción que es la segunda potencia de los tiempos, es decir, están en la proporción de los cuadrados de los tiempos.

SIMP.: A mí, ciertamente, me ha complacido más esta argumentación simple y clara del señor Sagredo que la para mí oscura demostración del autor, de modo que estoy plenamente convencido de que la cosa es tal y como se la ha expuesto, una vez que se ha aceptado la definición de movimiento uniformemente acelerado. Pero que sea tal la aceleración de la que se sirve la naturaleza en lo que atañe al movimiento de la caída de los graves, es algo, en mi opinión, un tanto dudoso por el momento. Pienso que tanto por lo que a mi respecta como por aquellos que piensan como yo, es éste el momento oportuno de presentar algunos de esos experimentos de los que se dice que abundan y que en muchos casos concuerdan con las conclusiones que se han demostrado.

SALV.: Vos, como un verdadero hombre de ciencia, exigís algo muy razonable. Es este el modo de actuar de aquellas ciencias que aplican las demostraciones matemáticas a los fenómenos [*conclusioni*] naturales, como es el caso de la perspectiva, de la astronomía, de la mecánica, la música y otras muchas, las cuales confirman sus principios que son los fundamentos de toda la estructura subsiguiente, con experimentos bien establecidos. Espero, de cualquier forma, que no os parezca una pérdida de tiempo el haber discutido con cierto detenimiento acerca de este primer y fundamental principio sobre el cual se apoya la inmensa máquina de infinitas conclusiones, sacadas por el autor, de las que sólo una pequeña parte aparecen en este libro. Bastante habrá hecho aquél con abrirnos de par en par la puerta hasta ahora cerrada a mentes bien capaces. Por lo que se refiere a los experimentos, no han sido pasados tampoco por alto por parte del autor; con el fin de dejar bien probado que la aceleración de los graves que caen de modo natural se da en la proporción antes desarrollada, me he visto muchas veces en su compañía, a fin de probarlo de la siguiente manera.[(9)]

En un listón o, lo que es lo mismo, en un tablón de una longitud aproximada de doce codos, de medio codo de anchura, más o menos y un espesor de tres dedos, hicimos una cavidad o pequeño canal a lo largo de la cara menor, de una anchura de poco más de un dedo. Este canal, tallado lo más recto posible, se había hecho enormemente suave y liso colocando dentro un papel de pergamino lustrado al máximo. Después, hacíamos descender por él una bola de bronce, dura, bien redonda y pulida.

Habiendo colocado dicho listón de forma inclinada, se elevaba sobre la horizontal una de sus extremidades, hasta la altura de uno o dos codos, según pareciera, y se dejaba caer (como he dicho), la bola por dicho canal, tomando nota como en seguida he de decir del tiempo que tardaba en recorrerlo todo. Repetimos el mismo experimento muchas veces para asegurarnos bien de la cantidad de tiempo y pudimos constatar que no se hallaba nunca una diferencia ni siquiera de la décima parte de una pulsación. Establecida exactamente esta operación, hicimos que esa misma bola descendiese solamente por una cuarta parte de la longitud del canal en cuestión. Medido el tiempo de la caída, resulta ser siempre, del modo más exacto, precisamente la mitad del otro. Haciendo después el experimento con otras partes, bien el tiempo de la longitud completa con el tiempo de la mitad, con el de dos tercios, con el de 3/4 o con cualquier otra fracción, llegábamos a la conclusión, después de repetir tales pruebas una y mil veces, que los espacios recorridos estaban entre sí como los cuadrados de sus tiempos. Esto se podía aplicar a todas las inclinaciones del plano, es decir, del canal a través del cual se hacia descender la bola. Observamos también que los tiempos de las caídas por diversas inclinaciones del plano guardan entre sí de modo riguroso una proporción que es, como veremos después la que les asignó y demostró el autor.

En lo que a la medida del tiempo se refiere, empleamos una vasija grande llena de agua, sostenida a una buena altura, que, a través de un pequeño canal muy fino, iba vertiendo un hilillo de agua, siendo recogido en un vaso pequeño durante todo el tiempo en que la bola descendía, bien por todo el canal o sólo por alguna de sus partes. Se iban pesando después en una balanza muy precisa aquellas partículas de agua recogidas del modo descrito, con lo que las diferencias y proporciones de los pesos nos iban dando las diferencias de los tiempos. Ocurría esto con tal exactitud que, como he indicado, tales operaciones, repetidas muchísimas veces, jamás diferían de una manera sensible.

Notas

1. Galileo no confiere a las definiciones un carácter puramente lingüístico y estipulativo (las definiciones de los «matemáticos, de que habla en la pág. [74] de la primera jornada), sino que son verdaderas proposiciones substantivas y últimas que dan pie a las axiomas. Galileo señala tácitamente a los mertonianos y parisinos del siglo XIV como ejemplo de la utilización de definiciones en el primer sentido. Aunque perfectamente consistentes y susceptibles de conducir a toda una serie de teoremas bien establecidos (como el del «grado medio», que constituye el Teorema I de la ciencia del movimiento naturalmente acelerado --véase la pág. 10--) la arbitrariedad o carácter convencional de la definición convierte a aquella teoría en un mero juego formal sin relevancia empírica. Por el contrario, tal relevancia queda automáticamente asegurada tan pronto como se descubra una definición que corresponda a la esencia del movimiento natural. Sin embargo, tal recurso al esencialismo no es arbitrario ni apriórico: la garantía de la correspondencia entre definición y esencia matemática de la naturaleza viene dada por la adecuación de las consecuencias (teoremas) a la experiencia. Nos encontramos con el antiguo método de resolución y composición, tan desarrollado por los médicos averroistas de Padua en sus comentarios a Aristóteles y Galeno.

2. La «estrecha conexión entre tiempo y movimiento» no es mas que un truco persuasivo de nuestro académico. Durante mucho tiempo, la conexión se establecía mas bien entre movimiento y espacio, más fácil de intuir y de representar geométricamente. El propio Galileo incurrió durante bastante tiempo en este error, como afirmará más adelante. En una famosa carta a Paolo Sarpi (Padua, 16 de octubre de 1604) Galileo, a pesar de formular correctamente la proporcionalidad entre los espacios recorridos y los cuadrados de los tiempos, a continuación, hace depender la velocidad, no del tiempo transcurrido, sino de los espacios atravesados.

3. Volvemos a encontrarnos aquí con el concepto de momento como modificación de una magnitud (la velocidad) susceptible de grados o intensidades. Toda la conceptuación galileana del movimiento acelerado es deudora de la tradición del siglo XIV. En ella se desarrolla la

idea de *intensio motus*, al concebir la velocidad como una cualidad intensiva sometida a procesos de intensio y *remisio*.

4. Estos impeti son claramente un producto de peso y velocidad, como pone de manifiesto el análisis que viene más adelante, relativo a las fuerzas de percusión, que disminuyen con la velocidad hasta un mínimo igual al peso, cuando la velocidad desaparece. Sin embargo, sería demasiado audaz y aun inexacto históricamente asimilar el impeto a la cantidad de movimiento clásica, dadas las dificultades cosmológicas con que se enfrentan los principios galileanos de conservación del movimiento y de la fuerza constante. Por otro lado, el impeto no se puede asimilar al impetus medieval, pues no es, como era este último, una causa del movimiento --una fuerza--, sino el electo de una fuerza sobre la velocidad de un móvil dotado de un peso (gravedad) determinado. Galileo no distingue entre peso y masa.

5. Galileo se ocupa aquí de cuestiones cinemáticas y no dinámicas. Esa es la razón de que deje a Sagredo la tarea de aplicar la teoría del *impetus* a la explicación de la causa del aumento de velocidad en la caída libre. El aumento es proporcional a la disminución espontánea (de acuerdo con la versión de Oresme de la teoría del *impetus*) del *impetus* comunicado al grave por la fuerza que se le debe aplicar a fin de mantenerlo en reposo a cierta altura, antes de dejarlo caer. Tal vez fuese esa la teoría que consideraba más aceptable, aunque no lo suficiente como para sostenerla frente a otras especulaciones aristotélicas y platónicas (: tendencia al lugar natural inversamente proporcional a la distancia o a la resistencia, antiperistasis, etc.).

En cualquier caso, Galileo ha puesto en boca de Sagredo la propia teoría que él había sostenido en el *De Motu*, lo que indica que la considera, cuanto menos, «interesante».

6. Del carácter persuasivo y propagandístico de esta cínica protesta de evidencia, puede dar buena idea el examen de las ejemplificaciones experimentales que vienen a continuación. En ellas, las dificultades se eliminan achacándolas a un oportuno efecto del medio. Véase el intento de suplir esta «evidencia» por una sofisticada demostración de carácter dinámico, contenida en un añadido posterior.

7. Que representará la tasa de aumento de la velocidad en el tiempo; o sea, la aceleración.

8. Es decir, las líneas que representan los tiempos. Dicho en términos clásicos: puesto que $s = \frac{1}{2} gt^2$, entonces $s=\frac{1}{2} g (t_2^2 - t_1^2)$ y $s = \frac{1}{2} g (t_2 + t_1)(t_2 - t_1)$, siendo «$(t_2 - t_1) = 1$», puesto que son tiempos consecutivos, y al ser «$\frac{1}{2} g$» constante, $s (t_2 + t_1)$, que es impar, por ser la suma de dos números consecutivos.

9. Galileo adopta en estos pasajes una posición metodológica justificacionista. Dejando de lado su esencialismo matemático, la presentación geométrica de la ciencia del movimiento sirve no sólo para extraer consecuencias contrastables, sino también para transmitir la verdad incuestionable de los primeros principios de la demostración. Por otro lado, la verdad de estos últimos se establece (al menos, verbalmente) por la confirmación de las consecuencias de los mismos. En este punto, Galileo coquetea con la falacia de afirmación de consecuente